

23. 解: (1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由题设可得  $a_2 = -2, a_4 = -1$ , 所以  $d = \frac{1}{2}, a_1 = -\frac{5}{2}$ .

$$\text{故 } a_n = -\frac{5}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} - 3.$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} \times \left( \frac{n}{2} - 3 - \frac{5}{2} \right) = \frac{n^2 - 11n}{4}.$$

24. 解: (1)  $f'(x) = 3x^2 + 1$ , 因此  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, +\infty)$ .

(2) 因为  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0$ , 所以  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  存在零点, 且

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} < 0.5.$$

故  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  是满足条件的一个区间.

25. 解: (1) 设  $E$  的标准方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 由题设可得  $a = 4, b = 3$ , 所以  $E$  的标准方

$$\text{程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(2) 由题设可知, 正方形的两条对角线所在直线的方程分别为  $y = x$  和  $y = -x$ .

$E$  与直线  $y = x$  的交点为  $\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right), \left(-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ .

故所求圆的半径为  $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ .